Université A. Assaadi
Faculté des Sciences
Département de Maths.

SMAI
Algèbre S_1
2010/2011

Devoir n° 1

A rendre pendant la séance du cours
01-12-2010.

Exercice 1 : On définit dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la relation R par :

$$f R g \Leftrightarrow \left\{ \exists \varphi \in E, \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ est bijective} \\ \varphi \circ f = g \circ \varphi . \end{array} \right. \right)$$

1/ Montrer que R est une relation d'équivalence dans E

2/ A-t-on $ch\ R\ sh$ (fonctions hyperboliques) ?

3/ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ pour que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $x \longmapsto x^2$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $x \longmapsto x^2 + px + q$ soient équivalentes.

Exercice 2 : Soient E un ensemble, $(F, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $f : E \longrightarrow F$ une application injective. On définit dans E une relation R par : $x R y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

-) Montrer que R est une relation d'ordre dans E.

Exercice 3 : Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre pair H le sous-ensemble de G défini par :

$$H = \{ x \in G \ / \ x^2 = e \ \text{ et } x \neq e \}$$

1/ Montrer que la relation S définie dans G par :

$$x \, S \, y \Leftrightarrow (y = x \ \text{ ou } \ y = x^{-1})$$

est une relation d'équivalence.

2/ En déduire que Card(H) est impair.

Exercice 4 : Soit $G = \mathbb{Z}^2$. On définit dans G la loi de composition T par : $(x,y)T(a,b) = (xa + Kyb, bx + ay)$ où K est un entier relatif.

-) Etudier la loi T.

Exercice 5 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par : $f_\alpha((x,y)) = (\alpha x, \frac{y}{\alpha})$.

1/ Montrer que f_α est bijective.

2/ On pose $\mathcal{F} = \{ f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^* \}$ muni de la loi $\circ$ (composée)

a) Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un groupe. Est-il abélien ?

b) Soit $\theta : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathcal{F}$

$$\alpha \longmapsto f_\alpha$$

-) Montrer que θ est isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(\mathcal{F}, \circ)$.